

## CONCOURS G2E

## PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas si nécessaire.

La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire.

**Attention, sont strictement interdits :**

- L'utilisation du blanc correcteur sous forme liquide, souris ou autre et effaceur.
- Les découpages et collages sur la copie.
- Les téléphones portables, "smartphones", les montres (connectées ou non), les chronomètres et les réveils.
- L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document.

Le sujet s'intéresse à des phénomènes liés à la cuisson ou à la conservation des aliments : les différents modes de cuisson des aliments sont présentés dans la partie A tandis que la partie B s'intéresse à l'évolution temporelle ou spatiale de la température des aliments lors de la cuisson. La partie C s'intéresse à l'étude de la microfiltration des boissons et aux caractéristiques du milieu poreux utilisé. Enfin la partie D traite de l'étude d'un réfractomètre à prisme.

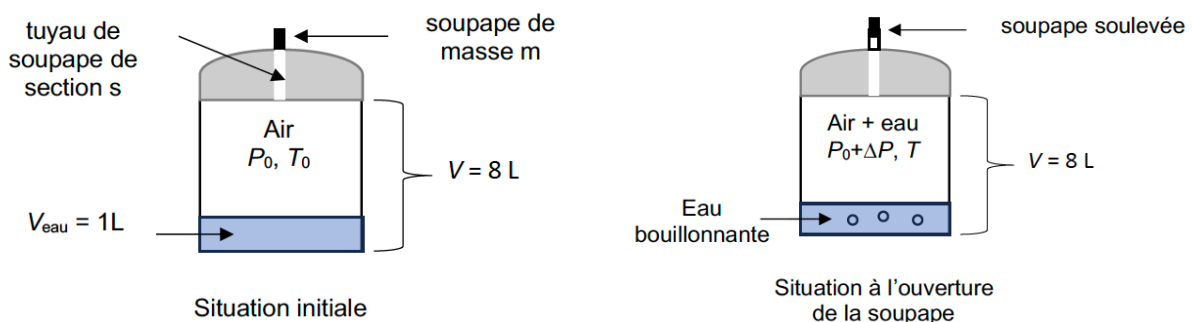
## A. CUISSON DES ALIMENTS

### Cuisson à la cocotte-minute

On s'intéresse à une cocotte-minute de volume total  $V = 8 \text{ L}$  dans laquelle est placé un volume  $V_{\text{eau}} = 1 \text{ L}$  d'eau pure, le reste du volume étant occupé par de l'air à la température  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  (température absolue  $T_0$ ) et sous la pression  $P_0 = 1 \text{ atm}$ .

On donne la masse molaire et la masse volumique de l'eau :  $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\rho = 1 \text{ kg.L}^{-1}$ .

On ferme initialement la cocotte-minute et on la place sur le feu. Les gaz seront supposés parfaits et on donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .



La pression de vapeur saturante  $P_s$  de l'eau est donnée par la relation de Duperray :

$$P_s = P_0 \left( \frac{\theta}{100} \right)^4$$

où  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1 \text{ bar}$  environ et  $\theta$  est la température en degrés Celsius.

1. Donner la valeur de la température d'ébullition de l'eau sous 1 atm.
2. La cocotte possède une soupape différentielle de 1 bar, c'est-à-dire que la soupape s'ouvre lorsque la pression à l'intérieur de la cocotte excède de  $\Delta P = 1 \text{ bar}$  la pression atmosphérique. Déterminer littéralement puis numériquement la température de l'eau bouillonnante lorsque la soupape se déclenche. En déduire l'intérêt de la cuisson avec une cocotte-minute.
3. La soupape a une masse  $m$  de 40 g et le tuyau de soupape a une section  $S = 4 \text{ mm}^2$ . Vérifier qu'il s'agit bien d'une soupape différentielle de 1 bar. On donne l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .
4. Quelle est la pression partielle  $p_{\text{air}}$  de l'air dans la cocotte lorsque la soupape se déclenche ? Déterminer  $p_{\text{air}}$  numériquement. On pourra utiliser la conservation de la quantité de matière d'air à l'intérieur de la cocotte.
5. Pour une pression partielle de l'air égale à 1,35 bar, déterminer la quantité de matière d'eau  $n_{\text{eau}}$  puis la masse d'eau  $m_{\text{eau}}$  sous forme de vapeur à l'intérieur de la cocotte lorsque la soupape se déclenche. Commenter.

### Cuisson par microondes

Dans un four à micro-ondes, une antenne émet des ondes électromagnétiques de fréquence  $f = 3 \text{ GHz}$ , destinées à être absorbées par les molécules d'eau contenues dans les aliments à réchauffer. Le mécanisme de chauffage des aliments par les micro-ondes est un mécanisme d'interaction entre le champ électrique de l'onde électromagnétique et les molécules d'eau contenues dans les aliments et possédant un moment dipolaire.

On va considérer le modèle simplifié de dipôle électrique suivant, qui représente un atome d'hydrogène : le noyau de charge  $+e$  est fixe, placé au point O, origine du référentiel considéré. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. L'électron de charge  $-e$  et de masse  $m$ , est par contre mobile. On suppose dans un premier temps que cette charge négative se déplace selon l'axe  $(Ox)$  dirigé par le vecteur unitaire  $\vec{e}_x$  sous l'action des forces suivantes (le poids étant négligé) :

- une force de rappel élastique :  $\vec{F}_{elas} = -kx \cdot \vec{e}_x$  (avec  $k$  une constante positive) ;
- une force de frottement fluide :  $\vec{F}_{fr} = -\frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x$  ( $\tau$  une constante positive) ;
- une force dite électrique :  $\vec{F}_{elec} = qE_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$  où  $E_0$  est une constante et  $q$  la charge ;

On donne la célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

6. Déterminer la longueur d'onde dans le vide de l'onde utilisée. Comparer cette longueur d'onde aux longueurs d'onde des ondes lumineuses du domaine visible.
7. Pourquoi cette onde peut-elle être qualifiée de sinusoïdale monochromatique ?
8. Appliquer la deuxième loi de Newton à l'électron et établir l'équation différentielle portant sur  $x(t)$  et régissant le mouvement de l'électron.
9. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

10. Donner, en justifiant, l'expression de la pulsation propre d'oscillation du système.
11. On étudie la solution de l'équation différentielle en régime permanent qui s'écrit sous la forme  $x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ . En passant en complexe, établir les expressions de  $A_m$  et de  $\varphi$  en fonction des données du problème et nommer ces termes.

### Cuisson traditionnelle

Dans un four traditionnel, la cuisson s'effectue par conduction thermique à partir des parois de la préparation à cuire. On s'intéresse à un phénomène unidimensionnel d'axe ( $Ox$ ).

12. Rappeler en quelques lignes, les propriétés du transfert thermique par conduction.

On donne la loi d'échelle des phénomènes diffusifs reliant  $\tau$  le temps caractéristique de diffusion,  $L$  une longueur caractéristique et  $D_{th}$  le coefficient de diffusivité thermique :

$$\tau = \frac{L^2}{D_{th}}$$

13. Etablir par analyse dimensionnelle l'unité de  $D_{th}$ .

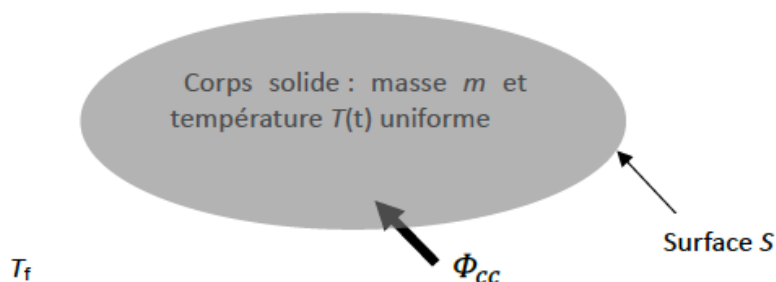
Une préparation de masse  $m$  est cuite en un « temps de cuisson »  $\Delta t_1$  tandis qu'une préparation de masse  $2m$  est cuite en un temps de cuisson  $\Delta t_2$ .

14. En supposant une proportionnalité entre la masse et le volume de la préparation, supposée sphérique de rayon  $R$ , obtenir une relation entre le rayon  $R_1$  d'une préparation de masse  $m$  et le rayon  $R_2$  d'une préparation de masse  $2m$ .
15. En déduire la relation suivante entre  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  :  $\Delta t_2 = 2^a \Delta t_1$  avec la valeur de la puissance  $a$  à préciser. Critiquer l'indication rencontrée dans un livre de cuisine et portant sur la cuisson d'une dinde : « compter un temps de cuisson de 1h30min par kilo ».

## B. ÉVOLUTION TEMPORELLE ET SPATIALE DE LA TEMPÉRATURE LORS DE LA CUISSON

### Cas des systèmes à gradient de température nul

En général, la température d'un corps lors d'un processus de cuisson varie à la fois en fonction du temps et de sa position. La température intérieure de certains corps reste essentiellement uniforme durant le processus de cuisson : la température est alors uniquement une fonction du temps  $T(t)$ . Il s'agit de l'approximation LCM (« Lumped Capacitance Method ») ou méthode du gradient nul. L'analyse du transfert thermique se fait alors en négligeant l'existence de gradient thermique à l'intérieur du corps en cuisson. On considère un corps de forme arbitraire, de masse  $m$ , de surface de contact  $S$  avec le milieu extérieur, de capacité thermique massique  $c$ , initialement à la température uniforme  $T_i$ .



A l'instant  $t = 0$ , le corps à cuire est placé dans un four de température uniforme  $T_f$  ( $T_f > T_i$ ) avec un coefficient de transfert conducto-convectif  $h$ .

16. Donner l'expression du flux conducto-convectif  $\Phi_{cc}$  en fonction des données.
17. A l'aide d'un bilan thermique pendant une durée  $dt$  à partir de l'écriture du premier principe, établir l'équation différentielle suivie par  $T(t)$  et la mettre sous la forme :

$$\frac{dT}{dt} + AT = B$$

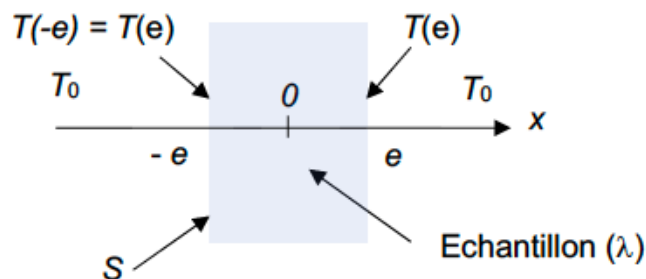
Exprimer les constantes  $A$  et  $B$  en fonction des données du problème.

18. Résoudre l'équation différentielle précédente pour en déduire  $T(t)$ .
19. Représenter graphiquement l'allure de la courbe  $T(t)$  en y faisant figurer la température initiale  $T_i$  et la température du four  $T_f$ .
20. Exprimer le « temps » ou durée de cuisson  $\Delta t$  pour atteindre une température donnée  $T(\Delta t)$ .
21. Déterminer, par intégration du flux conducto-convectif, l'énergie thermique  $Q$  échangée avec le milieu pendant la durée  $\Delta t$  en fonction de  $m, h, c, S, T_f, T_i$  et  $\Delta t$ .

### Profil de température en régime stationnaire dans un four à micro-ondes

Un échantillon de matériau de masse volumique  $\rho$ , de capacité thermique massique  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$ , essentiellement constitué d'eau, est placé dans un four à micro-ondes. Cet échantillon est parallélépipédique, de section  $S$  et d'épaisseur  $2e$ , suffisamment faible pour que l'on admette que le problème soit unidimensionnel. On se place en régime stationnaire, la température  $T(x)$  dépend alors de l'unique coordonnée  $x$ .

La température du milieu extérieur  $T_0$  est supposée constante. On note  $\mathcal{P}$  la puissance moyenne (en W) fournie par le four micro-ondes à l'échantillon. Cette puissance est supposée uniforme et joue le rôle de terme de source d'énergie thermique dans l'échantillon. On néglige tout transfert thermique à travers les surfaces horizontales.



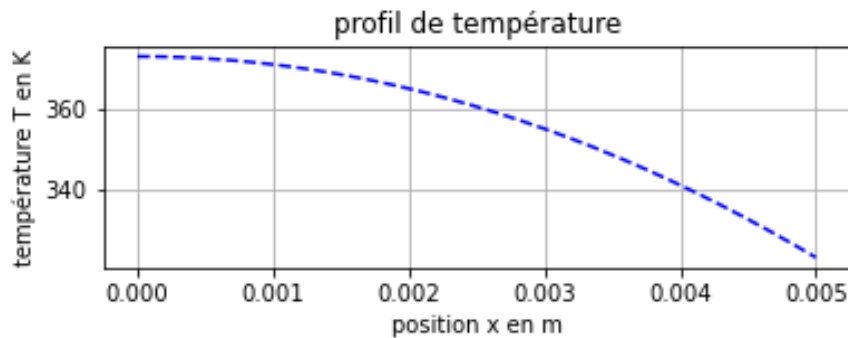
22. La loi de Fourier s'applique dans l'échantillon : rappeler cette loi en symétrie axiale d'axe  $x$  en donnant la signification et l'unité des différentes grandeurs.
23. On se place en régime stationnaire pour  $x \geq 0$ . Justifier que  $\frac{dT}{dx} < 0$  puis à l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , établir l'équation différentielle suivante :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\mathcal{P}}{2eS} = 0$$

On considère en annexe un programme Python permettant de résoudre l'équation différentielle précédente portant sur  $T(x)$  et de représenter graphiquement  $T(x)$ . Ce programme utilise la fonction `odeint` du module `integrate` de `scipy`.

24. Commenter les conditions choisies pour  $x = 0$ .
25. A quoi correspond la ligne 16 (repérage (1) dans le script)?
26. Expliquer de façon succincte et précise les lignes 19 à 21 (repérage (2) dans le script).

27. Recopier et compléter la commande odeint pour obtenir  $T(x)$  (repérage (3) dans le script). A quoi sert `[:, 0]` ?
28. Recopier et compléter la commande pyplot.plt (repérage (4) dans le script). afin d'obtenir le graphe ci-dessous que l'on commentera :



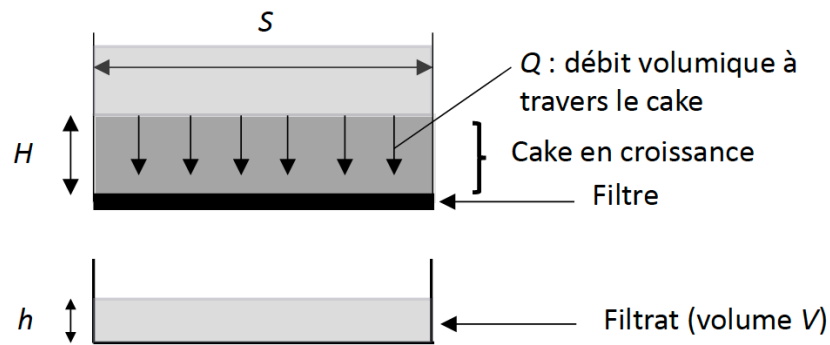
29. Représenter l'allure du profil de température pour  $-e \leq x \leq +e$ .

On s'intéresse maintenant à la résolution analytique de l'équation différentielle de la question 23. On admet que cette équation différentielle est valable pour  $x$  compris entre  $-e$  et  $e$ .

30. Résoudre l'équation différentielle en introduisant 2 constantes d'intégration notées  $A_1$  et  $A_2$ .
31. A l'aide des conditions aux limites :  $T = T(e)$  en  $x = e$  et en  $x = -e$ , exprimer  $T(x)$  en fonction de  $T(e)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\lambda$ ,  $e$  et  $S$ .
32. Donner l'expression de la température maximale  $T_{max}$  dans l'échantillon en fonction de  $T(e)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\lambda$ ,  $e$  et  $S$ .
33. Donner l'expression du flux thermique  $\Phi(x)$  à l'intérieur de l'échantillon puis en déduire  $\Phi(e)$  en fonction des données.
34. Nous allons maintenant prendre en compte les échanges thermiques au niveau des interfaces, modélisés par la loi de Newton du transfert conducto-convectif. On note  $h$  le coefficient d'échange. En déduire une nouvelle expression de  $\Phi(e)$  puis par continuité du flux thermique, l'expression de  $T(e)$  en fonction de  $T_0$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $h$  et  $S$  puis celle de  $T_{max}$  en fonction de  $T_0$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ,  $e$  et  $S$ .
35. Faire l'application numérique pour  $T(e)$  et  $T_{max}$  avec :  $e = 5,0 \cdot 10^{-3}$  m ;  $S = 1,0 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup> ;  $h = 10$  W.K<sup>-1</sup>.m<sup>-2</sup> ;  $\lambda = 0,50$  W.K<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup> ;  $\mathcal{P} = 200$  W et  $T_0 = 293$  K.
36. La modélisation précédente vous paraît-elle satisfaisante ? Quel phénomène conviendrait-il de prendre en compte lors du chauffage de l'échantillon dans le micro-onde ?

### C. MICROFILTRATION DES BOISSONS

La microfiltration est une technique qui permet de retenir les bactéries et les matières en suspension de l'ordre du micron, sous une pression de travail de 0,2 à 2 bars. Elle s'applique en particulier à la débactérisation du lait. On s'intéresse ici à la filtration de type « cake » où le solide à éliminer se dépose sur la face supérieure du filtre pour former une couche de milieu poreux en croissance. Dès que la première couche de « cake » est formée, la filtration se déroule à travers la couche de cake, le filtre jouant seulement la fonction de support. On constate alors, que pour un débit volumique constant  $D_v$  la variation de pression  $\Delta P$  de part et d'autre du filtre augmente proportionnellement à la quantité de solide déposé.  $H$  représente la hauteur du cake,  $S$  la surface du filtre perpendiculairement à l'écoulement,  $V$  le volume du filtrat et  $h$  la hauteur du filtrat.



Dans le « cake », la loi de Darcy s'applique :  $D_v = \frac{KS \Delta P_1}{\eta H}$  avec  $K$  la perméabilité du milieu poreux,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $\Delta P_1$  la chute de pression à travers le « cake ». Tandis que pour le filtre seul, la loi suivante s'applique :  $D_v = \frac{S}{\beta \eta} \Delta P_2$  avec  $\Delta P_2$  la chute de pression à travers le filtre et  $\beta$  un coefficient constant caractéristique du filtre et lié à sa résistance à l'écoulement.

37. Déterminer, par analyse dimensionnelle l'unité S.I de la perméabilité  $K$  ainsi que du coefficient  $\beta$ .
38. Rappeler les hypothèses permettant d'écrire la loi de Darcy.
39. Définir puis exprimer la résistance hydraulique  $R_{h1}$  du « cake » puis celle  $R_{h2}$  du filtre, en fonction des données.
40. En considérant l'association du cake et du filtre, écrire la relation existante entre la chute totale de pression  $\Delta P$  et le débit volumique  $D_v$ . En déduire la résistance hydraulique totale de l'ensemble  $R_h$  en fonction de  $R_{h1}$  et  $R_{h2}$  puis en fonction des données.

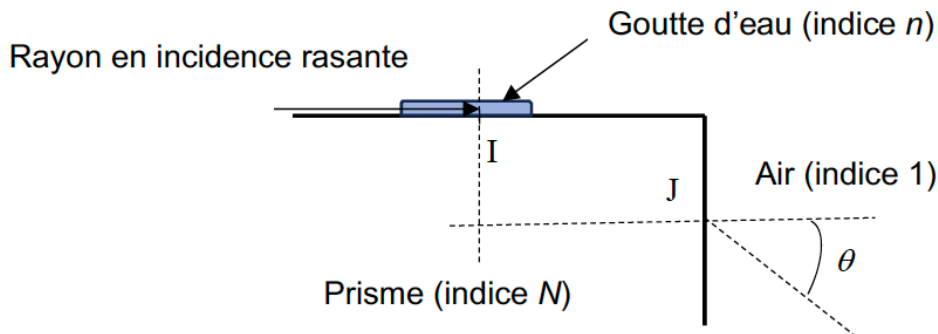
On cherche à déterminer la relation entre le temps  $t$  nécessaire pour obtenir un volume  $V$  de filtrat en maintenant la différence de pression  $\Delta P$  constante. On admet que la hauteur  $h$  de filtrat et la hauteur  $H$  du cake sont liés par la relation :  $H = \alpha h$  avec  $\alpha$  une constante dépendante de la porosité du « cake ».

41. Rappeler la relation existante entre le débit volumique  $D_v$  et le volume de filtrat  $V$ .
42. En exprimant  $H$  en fonction des autres données, en déduire que :  
 $dt = A V dV + B dV$  avec  $A$  et  $B$  deux constantes à exprimer en fonction des données.
43. Par intégration, obtenir l'expression de  $t$  en fonction de  $V$ ,  $A$  et  $B$ .
44. Quelle est la forme de la représentation graphique  $\frac{t}{V}$  en fonction de  $V$  ? En déduire une méthode pour remonter aux caractéristiques du cake poreux (perméabilité  $K$  du milieu poreux) et du filtre (coefficient  $\beta$ ).
45. Application : on obtient  $\frac{t}{V} = \frac{A}{2} V + B$  avec  $A = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ s.m}^{-6}$  et  $B = 3,6 \cdot 10^6 \text{ s.m}^{-3}$ .  
 Faire l'application numérique sur  $K$  et sur  $\beta$  avec  $\alpha = 0,48$  ;  $\Delta P = 1,0 \text{ bar}$  ;  
 $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$  ;  $S = 20 \text{ cm}^2$ .

#### D. ÉTUDE D'UN RÉFRACTOMÈTRE À PRISME

La détermination de l'indice de réfraction des liquides est une méthode d'analyse très utilisée dans l'industrie agroalimentaire et permet par exemple de contrôler la pureté du filtrat issu de la microfiltration. Dans le réfractomètre de Pulfrich, on utilise un prisme d'angle au sommet  $90^\circ$ .

Sur la face supérieure du prisme, on dépose une goutte de liquide à étudier d'indice optique  $n$ . On note  $N$  l'indice de réfraction du prisme. Avec une source monochromatique, on éclaire la goutte avec des rayons tangents à la face supérieure du prisme. Pour les rayons proches de la surface du prisme, on est donc en incidence rasante. On donne l'indice de réfraction du prisme  $N = 1,625$  (verre de type Flint) et on suppose que la réfraction intervient en I, centre de la goutte pour les rayons en incidence rasante. Une seconde réfraction intervient en J et on note  $\theta$ , l'angle de sortie du prisme par rapport à la direction incidente de la lumière.



46. Rappeler les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell-Descartes en illustrant par des schémas.
47. Dessiner sur votre copie, en reproduisant le schéma, la marche du rayon rasant se réfractant en I. Indiquer sur le schéma, l'angle de réfraction  $\alpha$  en I et l'angle d'incidence  $\beta$  en J.
48. Donner la relation reliant les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , puis montrer que :  $\sin \theta = \sqrt{N^2 - n^2}$ . Faire l'application sur  $\theta$  pour l'eau d'indice  $n = 1,333$ .
49. Quelle est la valeur maximale  $n_{max}$  de l'indice de réfraction d'un liquide que l'on puisse mesurer avec ce réfractomètre ?
50. Les appareils modernes utilisent une diode laser comme source de lumière et la température du prisme est régulée. Commenter ces choix.
51. Une mesure effectuée avec un liquide donné conduit à  $n = 1,4100$  avec une incertitude égale à  $1,1 \cdot 10^{-3}$ . La valeur tabulée pour ce liquide est  $n' = 1,4060$  pour  $20^\circ\text{C}$ . Y'a-t-il cohérence entre les deux valeurs ? on justifiera par un calcul de z-score (ou écart normalisé). En cas de non-compatibilité, proposer une explication.

## ANNEXE : PROGRAMME PYTHON POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE (PARTIE B)

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.integrate import odeint
4
5  #données numériques
6  e=5e-3 #épaisseur en m
7  S=1e-2 #surface en m2
8  Lambda = 0.5 #conductivité thermique en unité SI
9  P = 200 #Puissance fournie par le four en W
10
11 # choix des conditions en x=0 afin de déterminer les
12 # constantes d'intégration
13 T0 = 373 #Température en K lorsque x=0
14 dTsurdt0=0 #dérivée dT/dt lorsque x=0
15
16 x = np.linspace(0,e,1000)                                (1)
17
18 #Résolution de l'équation différentielle du second ordre
19 def derivee(Y,x):                                        (2)
20     T,dTsurdt = Y                                       (2)
21     return dTsurdt,-P/(2*e*S*Lambda)                   (2)
22
23 def temperature (T0, dTsurdt0):
24     return odeint(.....)[:,0]                            (3)
25
26 plt.title('profil de température')
27 plt.plot(.....)                                          (4)
28 plt.xlabel('position x en m')
29 plt.ylabel('température T en K')
30 plt.grid()
31 plt.show()
```

## Spécifications

### ODEINT

La fonction odeint se trouve dans le module integrate de la bibliothèque scipy.

Lorsque l'équation est du second degré en une variable  $u(t)$ , un vecteur  $X$  contenant la grandeur  $u$  et sa dérivée première  $\frac{du}{dt}$  est créé.

Dans un second temps, une fonction  $f$  contenant la dérivée première du vecteur  $X$  est définie, le terme de dérivée seconde est remplacé par l'expression issue de l'équation différentielle.

La commande odeint exige de saisir trois arguments :

odeint ( $f, X_0, t$ )

où :

- $X_0$  désigne la liste des conditions initiales  $u(t = 0)$  et  $\frac{du}{dt}(t = 0)$ .
- $t$  désigne la liste des instants.
- odeint renvoie un tableau dont la première colonne est la liste des valeurs successives de  $u(t)$  et la seconde, celles des valeurs successives de la dérivée première  $\frac{du}{dt}$ .