SESSION 2024

CONCOURS G2E

PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées. Les téléphones portables, "smartphones" et tout autre objet connecté doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur et effaceur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.

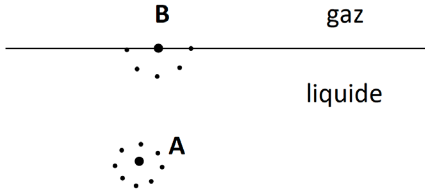
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas si nécessaire.

Dans ce sujet, nous nous intéressons à des problèmes physiques liés à la présence de gouttes, bulles et films. La partie A s'intéresse au phénomène de tension superficielle et à la loi de Laplace. La partie B traite de différents aspects des bulles de champagne tandis que la partie C s'intéresse au phénomène de cavitation et à l'implosion d'une bulle. Enfin, la partie D aborde la déviation de la lumière après double réflexion dans une goutte d'eau. Les parties sont indépendantes.

A. TENSION SUPERFICIELLE, COALESCENCE ET LOI DE LAPLACE

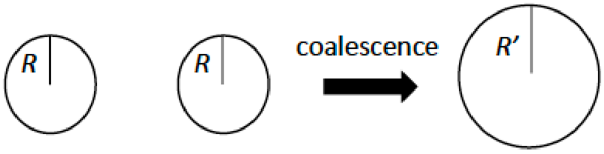
Tension superficielle

1. Quelles sont les forces intermoléculaires responsables de la cohésion d'un liquide à molécules aprotiques ? Quelle est leur origine ? Préciser leur caractère attractif ou répulsif.
2. On considère deux molécules du liquide : la molécule **A** est au cœur du liquide et la molécule **B** à la surface du liquide et du gaz le surplombant. On a représenté également les molécules plus proches voisines de **A** et de **B**, avec lesquelles elles sont en interaction. Représenter les différentes forces intermoléculaires s'appliquant sur chaque molécule et en déduire l'origine de la tension superficielle.
3. Exprimer l'énergie E associée à la surface S de l'interface liquide-gaz en fonction du coefficient de tension superficielle γ. Quelle est l'unité S.I. de γ ?



Coalescence de deux gouttes

La coalescence est la fusion de deux gouttes lorsque celles-ci entrent en contact. Le processus est favorable s'il induit une diminution globale de l'énergie du système, ici une diminution de l'énergie de surface. Supposons qu'on étudie la coalescence de deux gouttes de liquide identiques de rayon R pour donner une goutte de rayon R' :

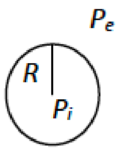


4. En raisonnant sur la minimisation de l'énergie de surface et en négligeant les effets de la pesanteur, justifier pourquoi les gouttes ont une forme sphérique.
5. En supposant le liquide incompressible, exprimer R' en fonction de R.
6. Déterminer la surface S' de la goutte issue de la coalescence et la comparer à la surface des gouttes de départ. Conclure sur le caractère favorisé ou non de la coalescence.
7. Représenter une molécule tensioactive à tête polaire et à queue apolaire. Sur un schéma, expliquer comment vont se positionner les tensioactifs à l'interface goutte-liquide dans le cas d'un milieu aqueux et d'une goutte apolaire.
8. Les tensioactifs ont pour effet de diminuer la tension superficielle en se positionnant à l'interface goutte-solution et empêchent la coalescence. Quelle peut être la nature des forces répulsives mises en jeu pour empêcher la coalescence ?

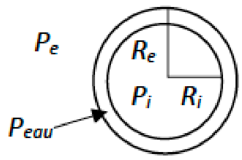
Loi de Laplace

Il existe une différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une gouttelette liquide due à l'existence de la tension superficielle qui tend à courber la gouttelette. On considère une gouttelette liquide sphérique (figure ci-dessous à gauche) de rayon R et de pression intérieure P_{i} en équilibre avec le milieu extérieur de pression P_{e}. On note $\Delta P = P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{e}}$ la différence de pression avec $\Delta P > 0$.

9. Donner la loi de Laplace exprimant ΔP en fonction de γ et R.
10. Calculer ΔP dans le cas d'une gouttelette d'eau en suspension dans l'air, de rayon $R = 50\ \mu m$ pour laquelle $\gamma_{\text{eau}} = 73.10^{-3}$ S.I (à 20°C).



gouttelette



bulle de savon

Dans le cas d'une bulle de savon (figure ci-dessus à droite), il y a deux interfaces air – eau liquide : on note P_{i} la pression de l'air à l'intérieur, P_{eau} la pression de l'eau dans le film de savon et P_{e} la pression de l'air extérieur. On note R_{i} le rayon intérieur, R_{e} le rayon extérieur du film et $\gamma_{\text{savon}} = 25.10^{-3}$ S.I. (à 20°C) la tension superficielle de l'interface air – eau savonneuse.

11. Écrire les lois de Laplace pour les deux surfaces intérieure et extérieure puis en déduire l'expression de $\Delta P = P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{e}}$ en fonction de γ_{savon}, R_{i} et R_{e}.
12. Simplifier l'expression précédente dans le cas d'un film mince pour lequel $R_{\mathrm{i}} = R_{\mathrm{e}} = R$. Calculer ΔP avec $R = 100\ \mu m$.

B. DÉTENTE ET CROISSANCE DES BULLES DE CHAMPAGNE

Détente des bulles de champagne lors de l'ouverture de la bouteille

A l'ouverture d'une bouteille de champagne, un panache blanc qui fait penser à des microgouttelettes, se forme. Nous allons proposer une interprétation à ce phénomène. Le gaz présent dans la bouteille est composé principalement de dioxyde de carbone mais contient aussi de l'eau. Il est initialement sous une pression d'environ $P_{\mathrm{i}} = 6{,}0\ bar$ et au moment de l'éjection du bouchon, il subit une détente adiabatique jusqu'à la pression atmosphérique $P_{\mathrm{f}} = 1{,}0\ bar$ environ. Pour interpréter simplement le panache, on se place dans le modèle d'une détente adiabatique réversible. Le gaz est supposé parfait, les capacités thermiques du gaz sont supposées indépendantes de la température. On donne l'expression de la variation d'entropie de n mol d'un gaz parfait lors d'une transformation le conduisant d'un état initial $(P_\mathrm{i}, T_\mathrm{i})$ à un état final $(P_\mathrm{f}, T_\mathrm{f})$:

$$\Delta S = C_\mathrm{p} \ln\left(\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}}\right) - nR\ln\left(\frac{P_\mathrm{f}}{P_\mathrm{i}}\right)$$

où C_p est la capacité thermique à pression constante du gaz.

13. Énoncer le second principe de la thermodynamique. Que vaut la variation d'entropie du gaz lors d'une détente adiabatique réversible ?
14. Calculer la température T_f du gaz à l'issue de la détente. On donne pour le gaz dans la bouteille : température initiale $T_\mathrm{i} = 293\ K$; capacité thermique molaire à pression constante : $C_{pm} = 37\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$; constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.
15. On donne ci-dessous les diagrammes de phase de l'eau et du dioxyde de carbone $\mathrm{CO_2}$. Préciser les états du système dans les domaines 1, 2 et 3.

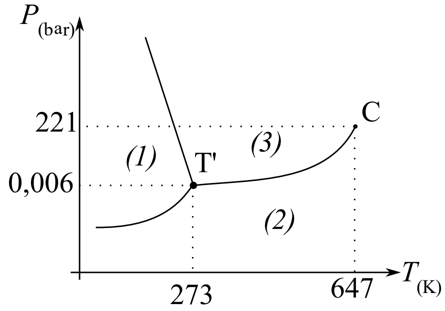


Diagramme de phase de l'eau

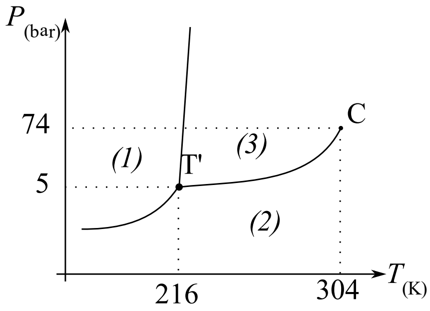


Diagramme de phase de $\mathrm{CO_2}$

16. En s'appuyant sur les diagrammes précédents, proposer une explication à la formation de panache.
17. Pourquoi le modèle proposé n'est-il pas satisfaisant ?

Apparition et croissance des bulles dans le verre par diffusion

Lorsque l'on verse du champagne dans une flûte, une quantité importante de bulles se crée, formant une mousse à la surface libre du liquide. L'expression suivante donne la relation entre la concentration en quantité de matière de dioxyde de carbone dans le champagne et la pression en Pa à la surface libre du champagne dans une situation d'équilibre :

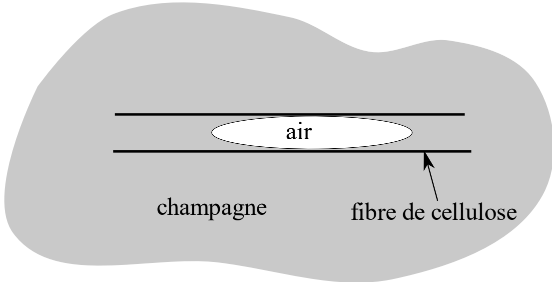
$$[\mathrm{CO_2}]_\mathrm{eq} = 0{,}7\frac{P}{RT}$$

Si la concentration en dioxyde de carbone est supérieure à la concentration d'équilibre $[\mathrm{CO_2}]_\mathrm{eq}$, le liquide est dit sursaturé. La concentration en masse du dioxyde de carbone dans le champagne dans une bouteille fermée est environ égale à $c_c = 12\ \mathrm{g.L^{-1}}$. On donne la masse molaire du dioxyde de carbone : $M = 44\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ et la constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

18. Calculer les concentrations en masse du dioxyde de carbone à l'équilibre, à $20\ °C$ sous 6 bar, notée par la suite c_6 puis celle à la fin de la détente (conditions $(P_\mathrm{f}, T_\mathrm{f})$), notée c_f, et enfin celle à $20\ °C$ sous 1 bar, notée c_1. On donnera les valeurs avec deux chiffres significatifs.
19. Montrer que les résultats précédents permettent de justifier qu'une détente entraîne *a priori* la formation de bulles à la surface du liquide.

Une fois le champagne versé, on observe des chapelets de bulles au sein d'une flute de champagne. L'apparition de ces bulles est principalement due à la présence de fibres de cellulose provenant de particules en suspension dans l'air voire du chiffon utilisé pour essuyer la flûte. Ces fibres de cellulose possèdent une cavité qui renferme de l'air. Les molécules de $\mathrm{CO_2}$ dissous en phase aqueuse vont diffuser vers la poche d'air. Celle-ci va grossir jusqu'à atteindre une extrémité de la poche et former alors une bulle.

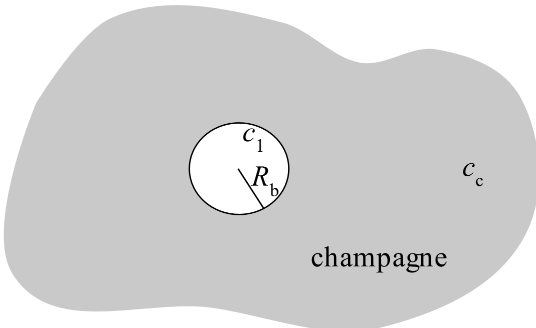
La pression de l'air dans la poche d'air est prise égale à 1,0 bar dans une situation d'équilibre et on se place à $20\ °C$.



20. Justifier la diffusion des molécules de CO_2 de la phase aqueuse vers la poche d'air.
21. Justifier alors que la poche d'air grossit dans les conditions expérimentales retenues.

Une fois la bulle formée, elle se détache de la fibre et monte dans le liquide dans lequel elle va grossir. Nous allons étudier cette augmentation de taille. Quand elle se détache de la fibre, la pression au sein de la bulle est égale à 1 bar. La bulle est supposée sphérique de rayon R_{b}.

On considère que la concentration en CO_2 dissous vaut c_{c} loin de la bulle et c_1 pour $r = R_{\mathrm{b}}$. On suppose dans un premier temps que R_{b} est constant et on se place en régime stationnaire.



22. Justifier qu'un flux Φ de dioxyde de carbone se met en place au sein du champagne liquide et montrer que ce flux se conserve.
23. Donner la loi de Fick dans le contexte étudié en précisant la signification physique des différents termes ainsi que leurs unités. On notera $n^*(r)$ la concentration particulaire du CO_2, r étant la distance au centre de la bulle avec $r > R_{\mathrm{b}}$ et D, le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans le champagne liquide.

Dans les questions suivantes, on introduit la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_{\mathrm{a}}$.

24. Donner la relation entre la concentration en masse de CO_2 en solution c, n^*, $\mathcal{N}_{\mathrm{a}}$ et la masse molaire M du dioxyde de carbone.
25. Montrer que la concentration en masse $c(r)$ au sein du champagne liquide vérifie l'équation : $\frac{dc}{dr} = \frac{\mathrm{A}}{4\pi D r^2}$, où A est une constante que l'on exprimera en fonction Φ, $\mathcal{N}_{\mathrm{a}}$ et M.
26. Établir l'expression suivante de $c(r)$: $c(r) = (c_1 - c_{\mathrm{c}})\frac{R_{\mathrm{b}}}{r} + c_{\mathrm{c}}$ pour $r > R_{\mathrm{b}}$.

Le régime n'est en réalité pas stationnaire. Nous utiliserons néanmoins l'expression trouvée dans la question 26 en prenant en compte le fait que le rayon $R_{\mathrm{b}}(t)$ dépend du temps.

27. En supposant que toutes les molécules de dioxyde de carbone arrivant à la surface de la bulle y pénètrent, montrer que le flux moléculaire, qui s'identifie au taux de variation $\Phi = \frac{dN_{\mathrm{g}}}{dt}$ du nombre N_{g} de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle, admet comme expression $\frac{dN_{\mathrm{g}}}{dt} = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{a}} P}{RT}\frac{dV}{dt}$, où P et T sont la pression et la température de la bulle supposées constantes, et $\frac{dV}{dt}$ le taux de variation du volume.

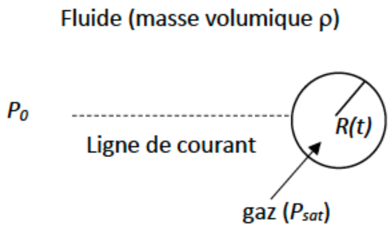
28. En déduire la relation : $R_{\mathrm{b}}\frac{dR_{\mathrm{b}}}{dt} = \frac{(c_{\mathrm{c}}-c_1)DRT}{PM}$ dont on vérifiera l'homogénéité.
29. On néglige le volume initial de la bulle, de sorte que $R_{\mathrm{b}}(t=0) \approx 0$. En déduire $R_{\mathrm{b}}(t)$.
30. On donne en plus des valeurs numériques précédentes : $D = 3.10^{-9}\ S.I.$ Calculer en ms la durée Δt mise par une bulle pour atteindre un rayon de 10 μm.

C. IMPLOSION D'UNE BULLE

On s'intéresse au phénomène de cavitation : il s'agit de la naissance de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide soumis à une dépression. Si cette dépression est suffisamment importante, la pression peut devenir inférieure à la pression de vapeur saturante P_{sat} et une bulle de vapeur est susceptible de se former. Celle-ci va imploser et voir son rayon passer d'une valeur initiale R_0 à zéro. La cavitation est responsable du phénomène d'embolie gazeuse chez les arbres en période de grande sécheresse pouvant entrainer la mort des arbres. Dans cette étude, on considérera l'ensemble des phénomènes mis en jeu comme isothermes et on négligera tout phénomène de transferts thermiques.

Modèle simple d'implosion

On suppose qu'initialement la bulle de gaz a pour rayon R_0 et contient du gaz à la pression P_{sat}.
Le liquide, de masse volumique ρ constante, s'écoule autour de la bulle immobile. Loin de la bulle, la pression du liquide est supposée constante et égale à $P_0 > P_{\mathrm{sat}}$.
On appelle vitesse radiale de l'interface liquide/gaz matérialisant la bulle, la dérivée temporelle de $R(t)$: $v = \frac{dR}{dt}$. On néglige tout phénomène de tension superficielle ainsi que les forces de pesanteur et on suppose qu'on se place, du point de vue du liquide, dans les conditions d'application de la relation de Bernoulli.



31. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli et l'appliquer sur une ligne de courant horizontale allant du cœur du liquide à la bulle de rayon R. On supposera que le liquide en contact avec la bulle est à la pression P_{sat}.
32. En déduire la vitesse radiale v de l'implosion. On s'attachera à bien respecter le signe de v.
33. En supposant v constante, en déduire la loi horaire $R(t)$.
34. En déduire le temps τ d'implosion de la bulle en fonction de ρ, R_0, P_0 et P_{sat}.
35. Calculer τ avec : $R_0 = 1{,}0\ \mathrm{mm}$; $P_0 = 1{,}0\ \mathrm{bar}$; $P_{\mathrm{sat}} = 0{,}032\ \mathrm{bar}$; $\rho = 1{,}0.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Modélisation à l'aide de l'équation de Rayleigh-Plesset

La modélisation précédente n'est pas satisfaisante car elle ne tient pas compte du transfert de masse au cours de l'implosion de la bulle. Ainsi la vitesse $v(t)$ dépend du temps et l'évolution temporelle de la bulle de vapeur de rayon $R(t)$ est donnée par l'équation de Rayleigh-Plesset, dans l'hypothèse où on peut négliger la contribution des gaz non condensables tels que O_2 ou N_2 :

$$\rho\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = P_{\mathrm{sat}} - P_0 - \frac{2\gamma}{R} - 4\eta\frac{\dot{R}}{R}$$

Dans le membre de gauche, figurent : R le rayon de la bulle, $v = \dot{R}$ la vitesse radiale et $\ddot{R}$ sa dérivée par rapport au temps. Dans le membre de droite, apparaissent trois termes :

➔ $P_{\mathrm{sat}} - P_0$ représente la différence entre la pression de vapeur saturante et la pression du liquide loin de la bulle. C'est le principal moteur responsable de la croissance de la bulle ou de son implosion.

➔ Le terme $-\frac{2\gamma}{R}$ représente l'effet de la tension superficielle.

➔ Le terme $-4\eta\frac{\dot{R}}{R}$ représente l'effet des forces de viscosité avec η la viscosité dynamique.

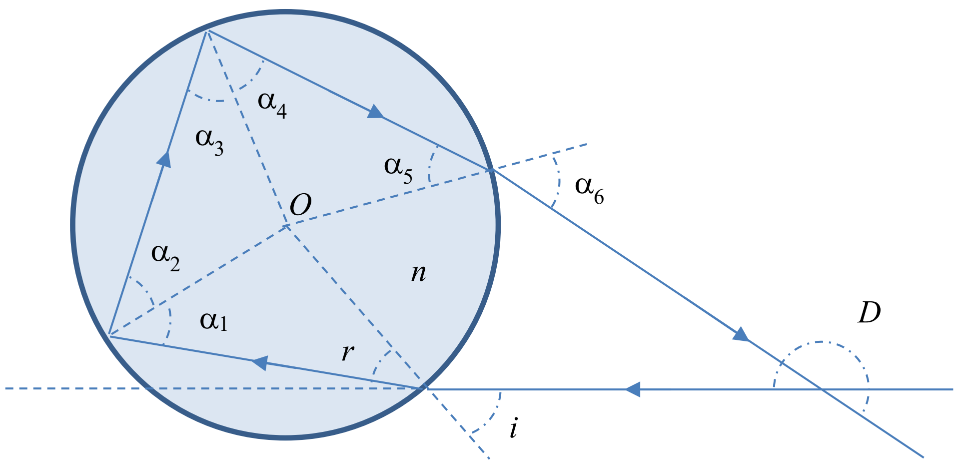
36. Que devient l'équation de Rayleigh-Plesset en régime stationnaire ? Quelle loi retrouve- t- on ?
37. Dans le terme de viscosité, que représente la grandeur $\frac{\dot{R}}{R}$? Donner l'unité S.I. de la viscosité dynamique η.

On néglige par la suite le terme de viscosité.

38. On se place en régime variable et on étudie des bulles de rayon initial R_0. À quelle condition sur R_0, peut-on négliger le terme de tension superficielle ? Simplifier alors l'équation précédente.
39. En multipliant l'équation précédente par R^2 et en remarquant que : $\frac{d(R^3\dot{R}^2)}{dR} = 3\dot{R}^2R^2 + 2R^3\ddot{R}$, intégrer l'équation précédente avec les conditions initiales suivantes : $R(t=0) = R_0, \dot{R}(t=0) = 0$ et montrer que : $\dot{R}^2 = \frac{2}{3}\frac{P_{\text{sat}} - P_0}{\rho}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]$.
40. En déduire l'expression de $\dot{R}$ lorsque $P_0 > P_{\text{sat}}$
41. Par séparation des variables et en utilisant l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\frac{U^3}{1-U^3}}\,dU = 0{,}747$, montrer que le temps d'implosion de la bulle vaut : $\tau = 0{,}915 R_0\sqrt{\frac{\rho}{P_0 - P_{\text{sat}}}}$.
42. Calculer τ avec : $R_0 = 1{,}0\ \text{mm}$; $P_0 = 1{,}0\ \text{bar}$; $P_{\text{sat}} = 0{,}032\ \text{bar}$; $\rho = 1{,}0.10^3\ \text{kg.m}^{-3}$ et comparer au résultat de la question 35.
43. Que vaut la vitesse radiale au moment de l'implosion ? Critiquer alors la pertinence du modèle précédent.

D. DÉVIATION DE LA LUMIÈRE DANS UNE GOUTTE D'EAU

On cherche à calculer la déviation D d'un rayon lumineux provoquée par deux réflexions à l'intérieur d'une goutte d'eau (voir schéma ci-dessous). L'angle D est l'angle entre le rayon sortant et le rayon entrant dans la goutte. On constate une dispersion des rayons de la lumière blanche à l'intérieur de la goutte d'eau.



44. Rappeler les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. On notera i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction (angles comptés positivement et non algébriques). On illustrera le propos par des schémas annotés.
45. Préciser en quoi consiste la dispersion des rayons lumineux.
46. Exprimer les angles α_j ($j = 1$ à 6 sur le schéma de la goutte) en fonction de i et de r.
47. Montrer que l'angle de déviation D s'écrit : $D = 2\pi + 2i - 6r$.
48. On se propose de déterminer numériquement la valeur de l'angle d'incidence i_P telle que les rayons incidents et réfléchis par la goutte soient perpendiculaires. On constate par ailleurs que le minimum de déviation vaut $D_{\min} = 241°$. On utilise un programme Python utilisant la fonction fsolve. Compléter ce programme en donnant l'expression de la fonction f retenue, écrite en langage python. On prendra $n_r = 1{,}3317$, l'indice de réfraction de l'eau pour une lumière rouge.

Données

➔ La fonction fsolve du module scipy.optimize permet la résolution d'une équation de la forme f(x) = 0. Elle nécessite l'importation du module correspondant. La fonction f doit être définie au préalable et la valeur initiale x_0 de l 'algorithme doit être précisée (valeur initiale à partir de laquelle le module recherche le zéro de la fonction). Syntaxe à utiliser :

```
import scipy.optimize as op
op.fsolve(f,x0)
```

➔ `np.arcsin(x)` donne en radians la valeurs de l'angle x, compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, dont on connaît le sinus.

➔ `math.degrees(a)` donne la valeur de l'angle a en degrés à partir de sa valeur en radians.

<u>Programme python à compléter</u>

```
import scipy.optimize as op
import numpy as np
import math
Pi = math.pi
def f(x) :
    return À COMPLÉTER


x0 = 0
zero = op.fsolve(f,x0)
iP = math.degrees(zero)
print("La valeur de iP recherchée en degrés proche de ",x0," est ",iP ,"")
```

L'exécution du programme donne :

```
La valeur de iP recherchée en degrés, proche de 0, est  38.39
```