SESSION 2023

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites. Les téléphones portables et autres «smartphones» doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence d'une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par deux approches : l'une essentiellement analytique et l'autre probabiliste.

En partie A, on étudie deux suites intermédiaires qui permettent d'obtenir une première limite. En partie B, on définit σ_n et on l'exprime en fonction d'une intégrale définie précédemment afin d'en calculer sa limite. Les parties A et B sont toutefois largement indépendantes.

En partie C, on propose une approche probabiliste afin de retrouver la limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie A : Étude de deux suites et calcul d'une limite

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}.$$

1. (a) Démontrer que f réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ dans lui-même.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad (1-x)\mathrm{e}^{x} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. On fixe un réel α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ et on considère les deux suites ci-dessous définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = n^{-\alpha} \ \text{ et } \ y_n = f(x_n).$$

   (a) Justifier que :

$$\forall x \in [0, x_n], \quad y_n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant (1-x)\mathrm{e}^x.$$

   (b) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \sqrt{n} = +\infty.$$

   (c) Rappeler le développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 3 et en déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} y_n^n = 1.$$

3. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \left((1-x)\mathrm{e}^x\right)^n \, \mathrm{d}x.$$

   (a) Démontrer que :

$$y_n^n \int_0^{x_n} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} \, \mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

   (b) En utilisant un changement de variable simple, en déduire :

$$y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \leqslant I_n \sqrt{n} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

   (c) En utilisant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, déduire de ce qui précède que :

$$I_n \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie B : Étude de deux suites et calcul d'une limite (bis !)

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \ \text{ et } \ \sigma_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

4. (a) En utilisant une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, calculer γ_1 et à l'aide d'une intégration par parties, établir que $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_{n+1} = (n+1)\gamma_n.$$

   (b) En déduire une expression simple de γ_n en fonction de n (cette expression simple sera naturellement prolongée en $n = 0$ par $\gamma_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$).

5. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \gamma_{n-k}.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n!} \int_0^{+\infty} (n+t)^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

(c) En utilisant le changement de variable $u = n + t$, en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n u^n \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u.$$

(d) En utilisant enfin le changement de variable $x = 1 - \frac{u}{n}$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!\mathrm{e}^n} I_n.$$

6. On admet l'équivalent ci-dessous appelé formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

En déduire que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Avec des lois de Poisson

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

Par ailleurs, on note :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

7. (a) Énoncer précisément la loi faible des grands nombres.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de M_n.
8. (a) Donner une expression de M_n^*, la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à M_n.
   (b) Exprimer $P(M_n^* \leqslant 0)$ en fonction de σ_n (défini en partie B).
9. (a) Énoncer précisément le théorème central limite.
   (b) En déduire à nouveau que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et retrouver sa limite.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels.

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lequel I_2 désigne la matrice identité et O_2 la matrice nulle.

Ce problème est consacré à une expérience aléatoire qui peut-être représentée par une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En partie A, on démontre quelques propriétés algébriques des matrices qui permettent cette représentation. En partie B, on étudie cette expérience aléatoire dans un cas particulier. Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A : Matrices d'ajout

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :

— Une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche.

— Un stock infini de boules noires.

— Un stock infini de boules blanches.

Cette expérience aléatoire consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher). À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches, si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches.

Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous dite «matrice d'ajout» :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera σ_A cette valeur commune et on dira que la matrice d'ajout A est équilibrée. On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices d'ajout équilibrées (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de tailles 2, à coefficients entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne).

1. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 blanches et on tire une boule noire. Quelle est la composition de l'urne à l'étape suivante ?

   (b) Calculer σ_A. Que représente σ_A ? Est-il possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires (justifier votre réponse) ?

2. On revient au cas général.

   (a) Justifier que $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

   (b) Démontrer que :
   $$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \sigma_A = 0 \Leftrightarrow A = O_2.$$

   (c) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A + kA' \in \mathcal{A}$.

   (d) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors $AA' \in \mathcal{A}$.

3. $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ désigne à nouveau une matrice appartenant à $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que σ_A est valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

   (b) Montrer que $d - b = a - c$, cette valeur commune étant notée δ_A, et vérifier que δ_A est valeur propre de A.

4. A désigne toujours une matrice appartenant à $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que le déterminant de A est égal à $\sigma_A \, \delta_A$.

   (b) On pose :
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
   Vérifier que $AA' = \sigma_A \, \delta_A \, I_2$.

(c) En déduire que A est inversible d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{A}$ si, et seulement si :

$$A = I_2 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Démontrer que toute matrice d'ajout équilibrée est diagonalisable (on pourra discuter selon que $\delta_A = \sigma_A$ ou $\delta_A < \sigma_A$) et en déduire l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{A}$ non inversibles.

   (b) Donner un exemple de matrice d'ajout non équilibrée et diagonalisable, justifier votre réponse.

   (c) Donner un exemple de matrice d'ajout non équilibrée et non diagonalisable, justifier votre réponse.

Partie B : Une matrice d'ajout particulière

On fixe $\sigma \in \mathbb{N}$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où :

$$A = \sigma I_2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ème tirage est noire, 0 si la boule tirée au n-ème tirage est blanche On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ égale au nombre de boules noires à l'issue du n-ème tirage.

6. (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par S_n et justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le système $(\mathscr{S})$ ci-dessous :

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} S_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}. \end{cases}$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n(\Omega)$:

$$P(X_{n+1} = 1 | S_n = s) = \frac{s}{2 + \sigma n}.$$

7. (a) En calculant $P(X_{n+1} = 1)$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(X_{n+1}) = \frac{\mathrm{E}(S_n)}{2 + \sigma n}.$$

   (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}.$$

   (c) En déduire enfin la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).