SESSION 2021

CONCOURS G2E

PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées. Les téléphones portables, "smartphones" et tout autre objet connecté doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

<u>La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur et effaceur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits</u>.

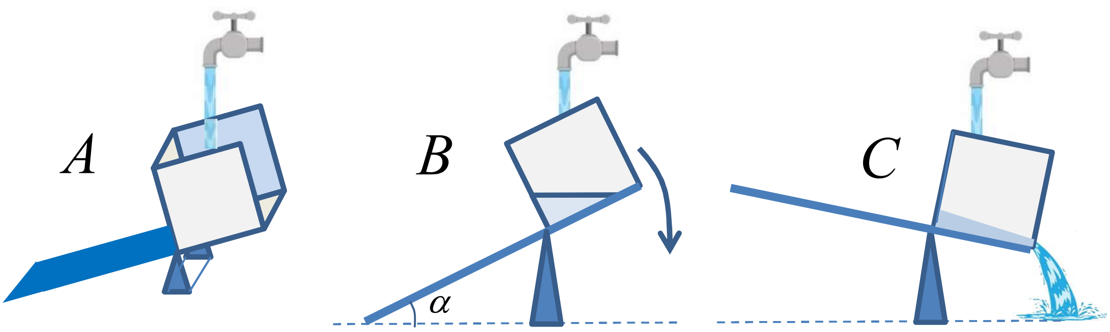
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas si nécessaire.

Les oscillateurs de relaxation sont des systèmes qui oscillent indéfiniment et périodiquement entre deux états d'énergie différente. Leur évolution n'est pas sinusoïdale et nécessite une source extérieure d'énergie. Dans ce problème nous étudions des exemples d'oscillateurs de relaxation dans des contextes physiques très différents. Les exercices proposés sont complètement indépendants.

Données pour l'ensemble du problème : intensité de la pesanteur $g = 9,81 m.s^{-2}$ *, constante des gaz parfaits* $R = 8,31 J.K^{-1}mol^{-1}$ *.*

1. LA BASCULE A EAU : UN OSCILLATEUR DE RELAXATION MECANIQUE

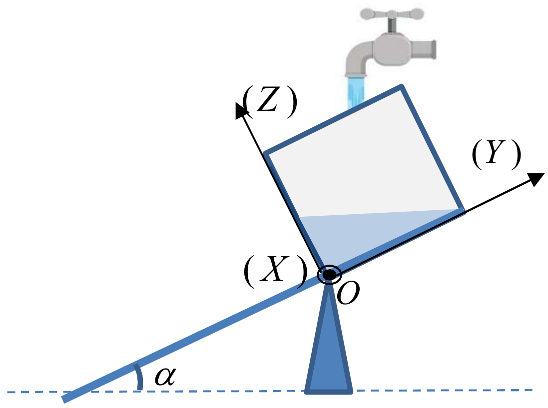
Le système ci-dessous constitue un premier exemple d'oscillateur de relaxation. Un robinet alimente régulièrement un récipient posé sur le côté droit d'une balançoire initialement inclinée à gauche (schéma A). Le poids de l'eau finit par faire basculer la planche (schéma B) et le récipient se déverse sur la droite (schéma C), puis remonte et retrouve sa position initiale A. Dans cet exercice nous allons déterminer à quelle condition un tel basculement est possible.

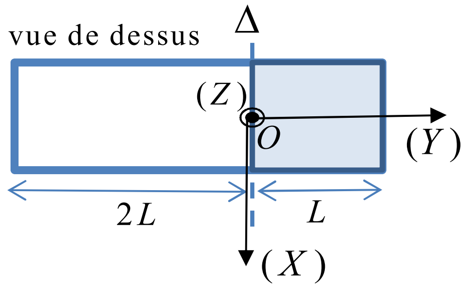


La bascule est constituée d'une planche rectangulaire homogène de masse M , de largeur L et de longueur $3L$. Cette planche est initialement inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Elle peut pivoter sans frottement autour d'un axe horizontal Δ parallèle à son petit côté et passant aux

2/3 de sa longueur (schéma ci-dessous). Le récipient a la forme d'un cube de côté L (ouvert sur le haut et sur le côté droit). Sa masse est négligeable.

1.1 Exprimer $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_{planche}}\right)$ le moment du poids de la planche par rapport à l'axe Δ en fonction de M, g, L et α, dans la position A. On conviendra que l'axe Δ est orienté vers le lecteur, c'est-à-dire dans la direction (X) du schéma ci-dessous.





On suppose pour l'instant que l'eau est montée jusqu'au bord droit du cube sans que la planche ne pivote, comme indiqué sur le schéma.

1.2. Exprimer la masse m_{tot} de l'eau contenue dans le récipient en fonction de sa masse volumique ρ, de L et de α.

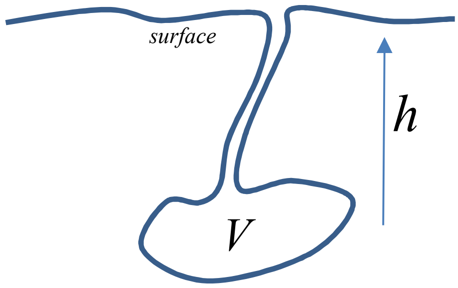
1.3. Soit G le centre de masse de l'eau contenue dans le récipient à cet instant. Définir G. On ne demande pas de calculer explicitement ses coordonnées.

On admet que dans le repère $\Re(0, X, Y, Z)$ orthonormé direct lié à la planche de la balançoire (voir schéma ci-dessus), les coordonnées de G valent $X_G = 0, Y_G = L/3$ et $Z_G = \frac{1}{3} L \tan\alpha$.

1.4. Exprimer en fonction de m_{tot}, g et α les coordonnées dans ce même repère $\Re$ du vecteur $\overrightarrow{P_{eau}}$ poids de l'eau dans le récipient. En déduire $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_{eau}}\right)$, le moment du poids de l'eau par rapport à l'axe de rotation Δ .

1.5. En déduire qu'une première condition nécessaire pour le basculement de la planche est que $\alpha < 45°$. En donner une interprétation géométrique simple. Cette condition étant remplie, quelle est la valeur maximale $M_{\max}$ de la masse M de la planche qui autorise un basculement au cours du remplissage du réservoir ? Calculer $M_{\max}$ pour : $\alpha = 30°, \rho = 1{,}0 kg.L^{-1}$ et $L = 50 cm$.

2. LE GEYSER : UN OSCILLATEUR DE RELAXATION EN THERMODYNAMIQUE



Un geyser est constitué d'une cavité souterraine de volume V située approximativement à une profondeur h sous la surface terrestre, à laquelle il est relié par un conduit. Le tout est rempli d'eau liquide, de masse volumique $\rho = 1,00 kg.L^{-1}$ supposée ici indépendante de la température et de la pression. La température de surface vaut $T_0 = 300 K$ et le gradient géothermique vaut $\gamma = 1,00 °C.m^{-1}$ (i.e. la température de la roche et de l'eau du geyser augmente de 1°C lorsqu'on descend de 1 mètre). La pression atmosphérique vaut $P_0 = 1,013 \times 10^5 Pa$. On admet que la vapeur d'eau, même saturante, se comporte ici comme un gaz parfait. La masse molaire de l'eau vaut $M = 18,0 g.mol^{-1}$.

2.1. Donner l'allure de la courbe de saturation associée à l'équilibre liquide vapeur dans le diagramme (P,V). Placer le point critique C et les domaines d'existence du liquide, de la vapeur, et du mélange liquide vapeur. Représenter sur ce graphique une isotherme à une température T inférieure à la température critique. Qu'appelle-t-on pression de vapeur saturante à la température T ? Que vaut la pression de vapeur saturante de l'eau à $T = 100°C$?

2.2. Dans la suite on verra que h est de l'ordre de 200 mètres. Déterminer la pression correspondante $P(h)$ dans la cavité, l'eau dans le geyser étant liquide et immobile. Si de la vapeur se forme dans la cavité, quel est son volume molaire v_G ? Comparer le volume molaire v_L de l'eau liquide à celui du gaz v_G.

On admet que l'enthalpie de vaporisation (ou *chaleur latente*) L obéit à *l'équation de Clapeyron* : $L = T\left(v_G - v_L\right)\frac{dP_{v,sat}}{dT}$. Dans cette expression, $P_{v,sat}$ est la pression de vapeur saturante, qui ne dépend que de la température T. Dans la suite on néglige v_L devant v_G, et on considère L comme une constante.

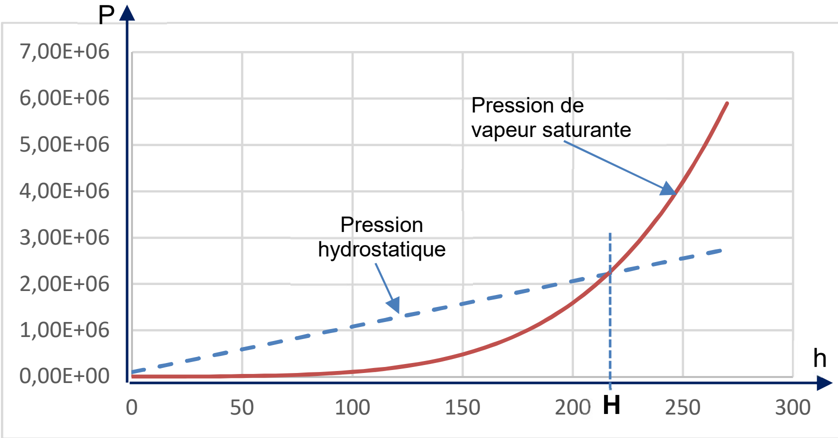
2.3. Montrer qu'avec les approximations faites, l'expression $P_{v,sat}(T) = Ae^{-\frac{L}{RT}}$ est solution de l'équation de Clapeyron, où A est une constante.

On rappelle que la température d'ébullition de l'eau vaut $T_{éb,atm} = 373 K$ à la pression atmosphérique P_0. On mesure $L = 40,0 kJ.mol^{-1}$.

2.4. En déduire la valeur numérique de la constante A avec trois chiffres significatifs (vérifier que A est proche de $4 \times 10^{10} Pa$).

Sur le graphe ci-contre on a représenté la pression de vapeur saturante et la pression hydrostatique (en Pascal) en fonction de la profondeur (en mètres).

Dans le cas d'un geyser, l'ébullition se produit d'abord dans la cavité (ce qui explique la grande quantité de vapeur formée). On note H la profondeur à laquelle la pression P de l'eau dans la cavité coïncide avec la pression de vapeur saturante $P_{v,sat}$ à la température imposée par le gradient géothermique.



2.5. Comparer la profondeur h de la cavité du Geyser à H. Justifier. Pour une profondeur comprise entre 0 et H, le potentiel chimique μ_V de l'eau vapeur est-il inférieur ou supérieur à celui μ_L de l'eau liquide ? Ecrire l'équation permettant *en principe* de calculer H. La solution numérique de cette équation est $H = 217m$.

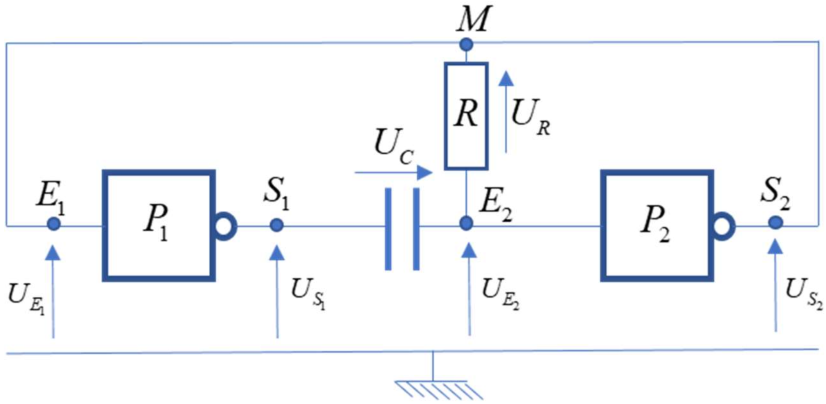
Dans la suite on supposera que la profondeur h de la cavité vaut exactement H. Dès le début de l'ébullition dans la cavité, les bulles remontent dans le conduit et expulsent rapidement l'eau qui s'y trouvait. Le conduit ne contient alors quasiment plus que de la vapeur d'eau et de l'air, et la pression dans la cavité passe subitement à la pression atmosphérique, alors que la température T de l'eau y est encore égale à celle de la roche environnante. Cette situation éloignée de l'équilibre conduit à une intensification soudaine de l'ébullition de toute l'eau de la cavité. On note $c = 4{,}18 J.K^{-1}.g^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée indépendante de la température, m la masse d'eau contenue dans la cavité, et m_V la masse de vapeur produite à chaque éruption du geyser. On mesure $m_V = 44{,}0 \times 10^3 kg$. On néglige tout transfert de chaleur avec la roche pendant l'éruption. Pour déterminer m, on admet que l'on peut appliquer la relation approximative suivante : $mc\Delta T + n_V L = 0$, où n_V est la quantité de matière de vapeur formée et $\Delta T = T_{éb,atm} - T_{géo}(h)$ représente l'écart de température de l'eau liquide entre sa valeur initiale dans la cavité et la température d'ébullition à la pression atmosphérique.

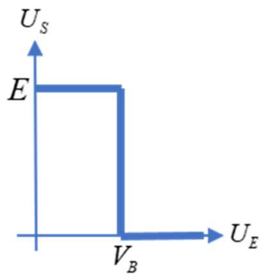
2.6. Proposer une interprétation simple de cette relation. En déduire la masse m et le volume V de la cavité.

2.7. On assimile la cavité à une sphère et on suppose qu'après éruption du geyser, la cavité se remplit rapidement avec de l'eau froide à la température $T_f = 300K$ qui se mélange à l'eau chaude restante. Quelle est la température de l'eau dans la cavité juste après le remplissage ? Qu'est-ce qui détermine essentiellement la période d'éruption ?

3. UN OSCILLATEUR DE RELAXATION ELECTRONIQUE

Les portes logiques P_1 et P_2 utilisées dans le montage ci-dessous sont des composants actifs, qui ont leur propre alimentation. Ce sont des *inverseurs* : leur caractéristique est indiquée sur le schéma ci-dessous à droite : pour une tension d'entrée U_E inférieure à la tension de *basculement* V_B, la tension de sortie U_S vaut E (avec $E > V_B$). Lorsque l'entrée U_E passe au-dessus de V_B, la sortie U_S passe de E à 0. L'impédance d'entrée des portes est considérée comme infinie : les courants *d'entrée* (à gauche des portes) sont nuls. Par contre leur courant de sortie est *a priori* quelconque. Nous allons déterminer la période des oscillations du potentiel des points du circuit.





On suppose que le système se trouve initialement dans l'état suivant : $U_{S_2} = U_{E_1} = E$, $U_{S_1} = 0$, $U_C = 0$ (le condensateur de capacité C et de tension U_C est déchargé).

3.1. Justifier sans calcul que la tension U_{E_2} va varier. Va-t-elle diminuer ou augmenter ?

Cette phase s'achève lorsque U_{E_2} atteint V_B et nous choisirons *cet instant* comme origine des temps. A $t = 0_-$ (c'est-à-dire juste avant le basculement), on a donc $U_{S_2} = U_{E_1} = E$, $U_{S_1} = 0$, et $U_{E_2} = V_B$. La porte 2 bascule.

3.2. Que valent ces tensions à l'instant $t = 0_+$, juste après le basculement de la porte 2 ? Justifier. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur dans la phase qui suit. En déduire l'expression de $U_C(t)$, en fonction de E, V_B, R, C et t, puis celle de $U_{E_2}(t)$ pendant cette phase.

Cette phase s'achève à l'instant T_B pour lequel U_{E_2} atteint de nouveau V_B.

3.3. Vérifier que $T_B = RC \ln\left(\dfrac{V_B + E}{V_B}\right)$.

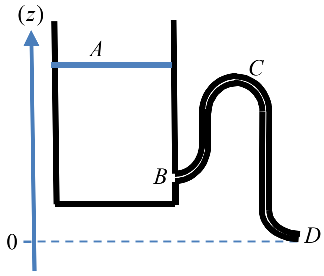
3.4. Que vaut la tension U_C à $t = T_{B-}$ (juste avant T_B) ? Que valent les tensions $U_{S_2}, U_{E_1}, U_{S_1}, U_{E_2}$ et U_C à $t = T_{B+}$ (juste après T_B) ?

3.5. Montrer que dans la phase qui suit, $U_{E_2}(t) = E + (V_B - 2E)e^{-(t-T_B)/RC}$.

3.6. Un nouveau basculement se produit à l'instant $T = T_B + T_H$. Etablir l'expression de T_H et de T en fonction de R, C, E et V_B. Justifier que T peut être qualifiée de *période des oscillations*.

3.7. Calculer T pour : $R = 100k\Omega, C = 10nF,\ E = 10V, V_B = 5V$.

4. LE SIPHON : UN OSCILLATEUR DE RELAXATION EN MECANIQUE DES FLUIDES



On considère un réservoir cylindrique d'axe vertical (Oz) orienté vers le haut, dont la base a pour aire S. Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine altitude h (soit $h = z_A$ pour un certain point A en surface). La partie basse de ce réservoir est percée d'un trou (point B), au contact d'un siphon (B-C-D), qui est une conduite de forme coudée et de section d'aire constante σ très petite devant S. La surface libre de l'eau (en A) et la sortie du siphon (point D) sont en contact avec l'air libre (pression atmosphérique P_0). D est plus bas que B, qui est lui-même plus bas que A. L'altitude de référence $z = 0$ est celle du point D, et les points B et C sont à des altitudes constantes z_B et z_C . Dans les calculs qui suivent nous allons considérer que le siphon est *amorcé* : il est entièrement rempli d'eau, considérée comme un fluide homogène de masse volumique ρ et incompressible : le siphon ne contient pas d'air. Dans ces conditions nous allons déterminer le temps de vidange du réservoir. On note g l'intensité de la pesanteur.

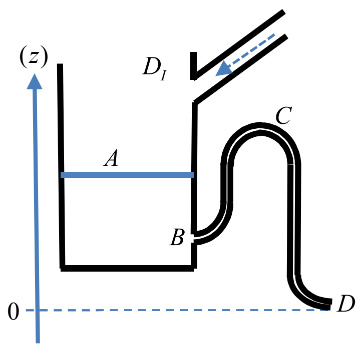
4.1. Ecrire le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre un point A à la surface de l'eau et un point D à la sortie du siphon. On suppose que les conditions d'application de ce théorème sont vérifiées. Quelles sont ces conditions ?

4.2. Justifier que la vitesse v_A de l'eau en A est très petite devant la vitesse en sortie du siphon v_D.

On remarque d'autre part que $v_A = -\dot{h}(t)$.

4.3. Justifier qu'avec les hypothèses faites, l'altitude $h(t)$ de l'eau dans le réservoir obéit approximativement à l'équation différentielle : $\dot{h} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h} = 0$.

4.4. Résoudre cette équation en supposant qu'à l'instant initial, $h(0) = h_0 \geq z_C$. En déduire que le niveau d'eau dans le réservoir parvient à l'entrée du siphon (en B) à l'instant $t_1 = \frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{g}\sigma}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{z_B}\right)$. Que se passe-t-il à cet instant ?



Afin de modéliser l'écoulement de l'eau dans une grotte, on reprend les calculs précédents en supposant désormais que le réservoir est alimenté en permanence par une arrivée d'eau de débit volumique constant D_I qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (voir schéma ci-contre).

4.5. Dans les mêmes conditions que précédemment (le siphon étant rempli d'eau), justifier que la hauteur h de l'eau obéit maintenant à l'équation différentielle $\dot{h} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h} = \frac{D_I}{S}$.

4.6. Vérifier que cette équation possède une solution stationnaire, pour une hauteur d'eau h_S que l'on exprimera en fonction de D_I, σ et g . Cette hauteur doit évidemment être supérieure à celle de l'entrée du siphon. A quel débit minimum $D_{I,\min}$ cela correspond-il ?

4.7. Lorsque le siphon contient de l'air, il ne fonctionne plus ($D_S = 0$) : on dit qu'il est *désamorcé*. Dans ce cas, comment évolue la hauteur d'eau dans le réservoir ?

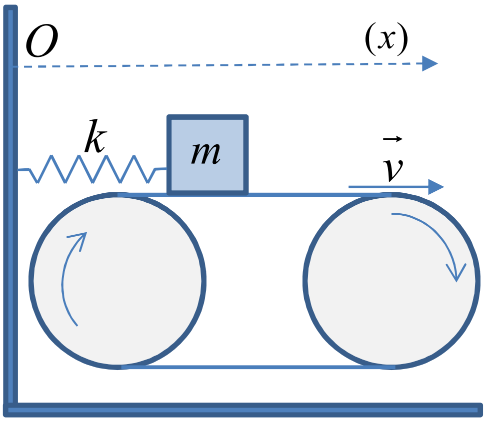
4.8. Soit D_C le débit volumique sortant par le siphon (amorcé) lorsque $h = z_C$. Exprimer D_C en fonction de σ, g et z_C. Que peut-on dire de l'évolution ultérieure de h si $D_I > D_C$?

Ainsi lorsque $D_I < D_C$, le siphon évolue entre les deux états : amorcé et désamorcé. On suppose de plus que lorsque le siphon est amorcé, D_I est négligeable devant le débit de sortie.

4.9. Exprimer dans ces conditions la période des oscillations du niveau d'eau $h(t)$ dans le réservoir. Représenter qualitativement l'allure de ces oscillations.

5. L'OSCILLATEUR DE RELAXATION « STICK-SLIP » : UN MODELE SIMPLE EN GEOPHYSIQUE

Le coulissement entre deux plaques lithosphériques (faille *transformante*) peut être modélisé en première approximation par le dispositif suivant : un objet considéré comme *ponctuel*, de masse m, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}$ constante (par rapport au sol, considéré comme « fixe »). Cet objet, qui est choisi comme « système », est également relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse x (axe horizontal). A l'instant $t = 0$, le ressort n'est pas tendu (il n'exerce aucune force sur ses extrémités), et l'abscisse de la masse est notée x_0 (c'est la longueur à vide du ressort).



5.1. On constate que tant que l'intensité de la force de traction $\vec{T}$ exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur $T_{\max}$, l'objet reste « collé », c'est-à-dire fixe par rapport au tapis. Exprimer alors la loi horaire $x(t)$ durant cette phase. Ecrire une relation simple entre la force de frottement $\vec{F}$ exercée par le tapis sur l'objet et la force $\vec{T}$ exercée par le ressort. Justifier. En déduire la norme $F(t)$ de la force exercée par le tapis sur l'objet.

Par contre dès que $\left\|\vec{T}\right\|$ atteint la valeur $T_{\max}$, l'objet « se décolle » et on considère qu'il glisse sans frottement sur le tapis : $\vec{F}$ s'annule, et l'objet n'est plus soumis qu'à l'action du ressort.

5.2. A quel instant t_1 (à exprimer en fonction de $T_{\max}, k$ et v) l'objet décolle-t-il du tapis ? A quelle équation différentielle obéit la position $x(t)$ de cet objet dans la phase qui suit ?

5.3. Justifier que l'on peut écrire la solution de cette équation différentielle sous la forme $x(t) = x_0 + A\sin\left[\omega_0\left(t - t_1\right) + \alpha\right]$, où A, ω_0 et α sont des constantes. Exprimer ω_0 en fonction de k et de m. En tenant compte des conditions initiales, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de ω_0 et t_1, et A en fonction de v, t_1 et ω_0.

5.4. Lorsque la vitesse de la masse par rapport au tapis s'annule à nouveau, la force de frottement $\vec{F}$ réapparaît. A quel instant t_2 cela se produit-il ? (exprimer t_2 en fonction de t_1, α et ω_0). Vérifier qu'à cet instant, la longueur du ressort vaut $x(t_2) = x_0 - A\sin\alpha$.

5.5. La masse est alors de nouveau entraînée par le tapis à vitesse constante v. A quel instant t_3 décolle-t-elle à nouveau ? Représenter graphiquement l'allure du mouvement périodique de la masse $x(t)$. Exprimer sa période T en fonction de ω_0, α, A et v.